Calculer la probabilité p_n que l'événement A soit réalisé une et une seule fois.

19 1. On lance 2 dés non pipés. On désigne par A_2 « le total des numéros amenés est pair ».

Calculer $p(A_2)$.

2. On lance 3 dés non pipés.
On désigne par
A_3 « le total des numéros amenés est pair ».

Calculer $p(A_3)$.

3. On lance n dés non pipés.
On désigne par A_n « le total des numéros amenés est pair ».

Montrer par récurrence sur n que la suite $(p(A_n))$ est constante.

20 Un gène peut avoir deux états A « allèle dominant » ou a « allèle récessif ».
Un individu peut avoir l'un des trois génotypes suivants : « AA », « Aa » ou « aa ».
Un enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.
1. On suppose que l'un des parents a le génotype « AA » et l'autre « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
2. On suppose que les deux parents sont de génotype « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
c. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « aa » ?
3. On note p_n, q_n et r_n les probabilités respectives qu'un individu de la $n^{ème}$ génération soit de type « AA », « Aa » ou « aa ».
A l'aide d'un arbre, montrer que

a. $p_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$.

b. $r_{n+1} = \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$.

c. $q_{n+1} = 1 - \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{q_n}{2} + r_n\right)^2$.

4. On note $\alpha = p_0 - r_0$.

a. Montrer que pour tout n, $p_n - r_n = \alpha$.

b. Montrer que pour tout n, $2r_n + q_n = 1 - \alpha$.

5. En déduire que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes.

21 Dans une foire une publicité annonce « Un billet sur deux est gagnant, achetez deux billets »
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant.
1. Un jour , cent billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.
Calculer la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.
2. Un autre jour, 2n billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.

Soit p_n la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.

a. Montrer que $p_n = \frac{3n-1}{4n-2}$.

b. Calculer p_1 et expliquer le résultat.

c. Montrer que pour tout entier n non nul, $\frac{3}{4} \le p_n \le 1$.

3. Tous les jours, 2n billets sont mis en vente.
Un promeneur revient chaque jour, pendant 3 jours, acheter deux billets.

a. Quelle est la probabilité q_n , qu'il obtienne au cours des ces 3 jours au moins un billet gagnant ?

b. Etudier la limite de la suite (q_n).

22 Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.
1. On suppose qu'on achète n billets et on note A l'événement « avoir au moins un billet gagnant ».
Exprimer en fonction de n la probabilité de l'événement A.
2. Combien de billets faut-il acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieur à 0.5 ?